Geometria iperbolica 14-05

$$K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \qquad \mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \qquad f = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O} < K < K \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$(\underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{\overset{}{K\otimes\mathbb{R}}}, K, \mathcal{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in (\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow (a+\sqrt{2}b,\ a-\sqrt{2}b)$$ è un isomorfismo di $\mathbb{R}$-algebre

In part. è surgettivo $\{(1,1), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = f^\sigma$$

$$SO(f, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\ i\ } SO(f, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]) \xrightarrow{\ \varphi\ } SO(f, \mathbb{R}) \times SO(f^\sigma, \mathbb{R})$$

$$M \longmapsto (M, M^\sigma)$$

Claim: $\underbrace{SO(f, \mathbb{R}) \times SO(f^\sigma, \mathbb{R})}_{= G}$ è definito su $\mathbb{Q}$, e $\varphi(SO(f, \mathbb{Q})) = G_{\mathbb{Z}}$

1) $SO(f, \mathbb{R}) \times SO(f^\sigma, \mathbb{R})$ è definito su $\mathbb{Q}$.

$$Q = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Q' = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2(n+1)\times 2(n+1)}$$

$$Q \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$SO(Q', \mathbb{R}) \doteq \left\{ M \in SL(2(n+1), \mathbb{R}) \;\middle|\; M^T Q' M = Q', \text{ minori } 2\times 2 \text{ della forma } \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$SO(Q', \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie semisemplice e definito su $\mathbb{Q}$!

$$SO(Q', \mathbb{R}) \cong SO(q, \mathbb{R}) \times SO(q^{\sigma}, \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \longrightarrow (\boxed{a+\sqrt{2}b}, \boxed{a-\sqrt{2}b}) \cdots\to \text{procedendo coefficiente per coefficiente}$$

$$\text{Data } \underset{2(n+1)\times 2(n+1)}{A} \in SO(Q', \mathbb{R}) \rightsquigarrow \Big(\underset{n+1\times n+1}{\boxed{M}}, \underset{n+1\times n+1}{\boxed{M^{\sigma}}}\Big)$$

Per costruzione $\varphi(SO(f, \mathcal{O})) = SO(Q', \mathbb{Z})$

$\varphi(SO(f, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]) = SO(Q', \mathbb{R})$

Abbiamo applicato la restrizione degli scalari a

$$SO(f, \mathbb{Q}[\sqrt{2}]) \xrightarrow[\operatorname{Res}_{\mathbb{Q}[\sqrt{2}]/\mathbb{Q}}]{} SO(Q', \mathbb{Q})$$

Corollario: $SO(f, \mathcal{O})$ è un reticolo aritmetico $SO(f, \mathbb{R}) \times \boxed{SO(f^{\sigma}, \mathbb{R})}$

definita positiva

$$\underset{SO(n+1, \mathbb{R})}{\overset{\mathbb{R}}{\cong}}$$

è compatto.

$\Rightarrow$ Quozientando per $SO(f^{\sigma}, \mathbb{R})$ (che è un sottogruppo compatto e normale) otteniamo che $SO(f, \mathcal{O})$ è un reticolo aritmetico in $SO(f, \mathbb{R}) \cong SO(n,1)$

$$SO(f, \mathcal{O}) \cap SO^{\circ}(f, \mathbb{R}) = \Gamma \to \text{è un reticolo in } \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n).$$

Generalizzando:

Sia K un campo totalmente reale (K è un'estensione finita di $\mathbb{Q}$, $\forall$ embedding di Galois $\sigma: K \to \mathbb{C}$, $\sigma(K) \subset \mathbb{R}$)

Es: $\mathbb{Q}(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n})$

Sia f una forma quadratica ammissibile su K.

(f ha segnatura $(n,1)$, e $\forall\, \sigma \neq id$, f^σ è def. positiva)

↳ forma a coeff. in $\mathbb{R}$.

Allora $SO(f,\mathcal{O})$ è un reticolo aritmetico in $SO(f,\mathbb{R}) \simeq SO(n,1)$

Def: Un reticolo in $SO(n,1)$ commensurabile con un reticolo così costruito si dice un reticolo aritmetico di tipo più semplice.

Facendo la restrizione degli scalari

$SO(f,\mathcal{O})$ è un reticolo aritmetico in

$\sigma_1,\dots,\sigma_d : K \to \mathbb{R}$ sono gli embedding di Galois non banali

$$SO(f,\mathbb{R}) \times \underbrace{SO(f^{\sigma_1},\mathbb{R}) \times \dots \times SO(f^{\sigma_d},\mathbb{R})}_{K \text{ compatto}}$$

Attenzione: $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ ... che base scegliamo per l'estensione $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]/\mathbb{Q}$?

1) Dobbiamo scegliere una base data da elementi $\mathcal{O}$.

$\underset{\substack{\shortparallel \\ B_1}}{\{1, \sqrt{5}\}}$ oppure $\left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$\hookrightarrow$ radice di x^2-x-1

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ non si scrive come $a+b\sqrt{5}$ con $a,b \in \mathbb{Z}$

In generale scegliendo basi diverse si ottengono reticoli commensurabili.

Data una base per l'estensione data da elementi in $\mathcal{O}$ $\overbrace{\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}}^{B}$,
il gruppo additivo generato da B ha sempre indice finito in $\mathcal{O}$

$\Rightarrow$ Gli $\mathbb{Z}$-punti della restrizione degli scalari hanno sempre indice finito in $\varphi(SO(q, \mathcal{O}))$.

Prop: Forme ammissibili q_1 e q_2 definite su campi tot. reali K_1 e K_2 definiscono reticoli commensurabili $\iff$ $K_1 = K_2$ e $\boxed{q_1 \underset{K}{\sim} k \cdot q_2}$ per qualche $k \in K$.

facile $\Leftarrow$

$\Rightarrow$ difficile

$\downarrow$

$Q_1 = k \cdot M^T Q_2 M$ per qualche $k \in K$

e $M \in GL(n, K)$

Corollario 1 il campo K e la classe di equivalenza della forma sono invarianti della classe di commensurabilità.

Corollario 2) Esistono infinite classi di commensurabilità di reticoli in $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$

$K_a = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$ a è un intero square-free K è tot. reale

$$f_a = \begin{pmatrix} -\sqrt{a} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

è ammissibile. Al variare di a ottengo ∞ classi di commensurabilità di varietà iperboliche in ogni dimensione.

Prop: $\Gamma \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ reticolo aritm. di tipo più semplice (campo K, forma f).

$\mathbb{H}^n/\Gamma$ è non compatto $\iff K = \mathbb{Q}$ e f è isotropa su $\mathbb{Q}$, cioè

$\exists\, v$ a coordinate razionali tale che $f(v,v) = 0$

Esempio: $f = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ produce sempre reticoli non co-compatti

$f = -\sqrt{2}\, x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ " " " cocompatti

$f = x^2 + y^2 + z^2 - 7w^2$ è definita su $\mathbb{Q}$ ma è anisotropa $\Rightarrow$ def. reticolo cocpt.

Teo (Meyer) Una forma quadratica indefinita in 5 o + variabili su $\mathbb{Q}$ è isotropa.

Corollario Per avere reticoli co-compatti in dim ≥ 4 bisogna prendere $K \neq \mathbb{Q}$

In tutte le dimensioni esistono infinite classi di comm. di reticoli compatti e infinite cl. di comm. di reticoli non-cocompatti.

Fatti:

1) Non tutti i reticoli aritmetici sono di tipo più semplice.

2) In dim. pari tutti i reticoli aritmetici sono di tipo + semplice

3) In ogni dimensione i reticoli aritmetici non cocompatti sono di tipo più semplice.

4) In ogni dimensione esistono reticoli non aritmetici.

5) dim 3: Il complementare del nodo fig. 8, è l'unico complementare di nodo iperbolico aritmetico. (È di tipo più semplice)

Data una varietà iperbolica con cuspidi, al + un numero finito di Dehn filling sarà aritmetico.

6) Se un gruppo di Coxeter è aritmetico, allora è di tipo più semplice

Esempi:

$\Delta(\infty,\infty,\infty)$ $\quad f = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$

O ottaedro ideale regolare $\quad f = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

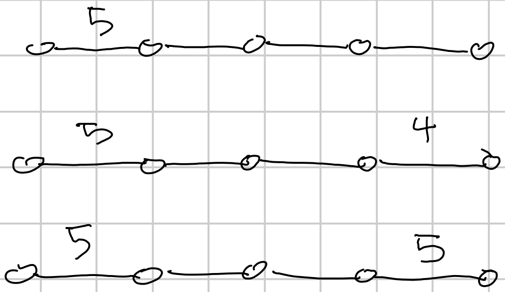
24-cella ideale regolare $\quad f = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

Tetraedro ideale regolare $\quad f = x_0^2 + 3x_1^2 - x_2 x_3$

Dodecaedro ad angoli retti:

$\circ \overset{5}{\text{———}} \circ \text{———} \circ \overset{4}{\text{———}} \circ \qquad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad f = -\varphi x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

120 celle



sono tutti commensurabili

$$f = -\varphi x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \qquad K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$